Att räkna gitterpunkter i polyedrar

speciellt i KONER!

Jan Snellman[1]

[1]Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, 21 nov, 2006

Presentationen finns på `www.mai.liu.se/~jasne/`

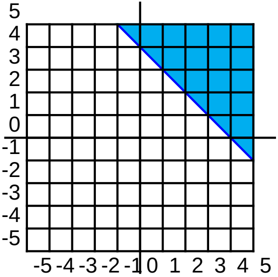
Översikt

Konvexa mängder

Halvrum

Låt E^n stå för det vanliga Euklidiska rummet i n dimensioner. Ett *slutet halvrum* består av alla punkter på ena sidan av ett hyperplan:

$$H_{\alpha,\beta} = \{ x \in E^n | x \cdot \alpha \geq \beta \}$$

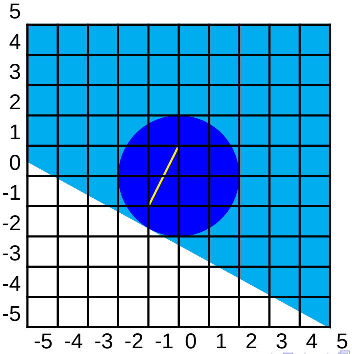


$$x_1 + x_2 \geq 4$$

Konvexa mängder

En mängd $s \subset E^n$ är *konvex* om den är ett (ändligt eller oändligt) snitt av halvrum. Annorlunda uttryckt: om $x, y \in S$ så ligger hela linjestycket från x till y innehållet i S;

$$\{ tx + (1-t)y | 0 \leq t \leq 1 \} \subset S.$$



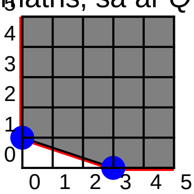
Konvexa mängder

Polyedrar

Ett *ändligt* snitt av halvrum kallas *polyeder*. En polyeder kan följaktligen anges med ändligt många, m stycken, olikheter:

$$Q = \{ x \in E^n | Ax \geq b \}, \quad A \text{ är en } m \times n \text{ matris}$$

Om olikheterna är heltaliga, dvs om A ovan är en heltalsmatris, så är Q *rationell*.



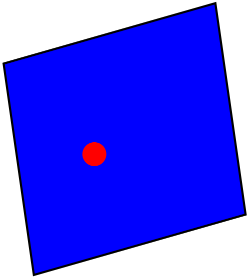
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konvexa mängder

Polytoper

Är polyedern begränsad, kallas den *polytop*. En polytop P kan även ges som det *konvexa höljet* av sina *hörn*; ett hörn är en punkt i P ej innehållen i det inre av något linjestycke inuti P.

$$\mathrm{conv}(v_1, \ldots, v_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}$$

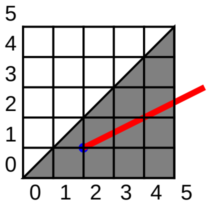


$$p = 0.2v_1 + 0.2v_2 + 0.3v_3 + 0.3v_4$$

Konvexa mängder
Koner

En *kon* K är en konvex mängd så att *strålen från origo genom* u, $\{\, tu | t \geq 0 \,\}$, ligger helt i K, för varje $u \in K$. Den är *polyhedral* om den dessutom är en polyeder. Då kan den anges på formen

$$K = \{\, x \in E^n | Ax \geq \mathbf{0} \,\}$$

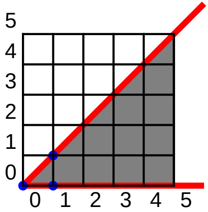


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konvexa mängder

Ändligt genererade koner

I likhet med hur en polytop kan anges som det konvexa höljet av ändligt många hörn, kan en polyhedral kon *genereras* av ändligt många *extremala strålar*:



$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t \geq 0 \right\}$$

Gitterpunkter i polyedrar

Exempel: heltalspartitioner med högst två delar

En *partition* av ett heltal n är ett sätt att skriva den som en summa av icke-negativa heltal, $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$. Ordningen spelar ingen roll, så vi kan anta att

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r \geq 0. \tag{1}$$

Vi kan därför se en heltalspartition av n i högst r delar som en gitterpunkt $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, som ligger i konen K bestämd av olikheterna (1), och dessutom på hyperplanet

$$\sum_i a_i = n \tag{2}$$

Exempel:

$$7 = 3 + 1 + 1 + 1$$

kodas som

$$(3, 1, 1, 1) \in \mathbb{Z}^4.$$

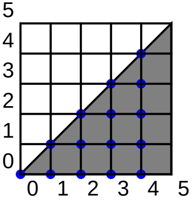
Gitterpunkter i polyedrar

Exempel: heltalspartitioner med högst två delar

En partition av n med högst två delar kan kodas som ett par $(a_1, a_2) \in E^2$, där

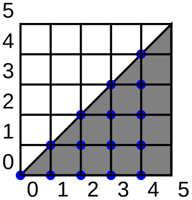
- $a_1, a_2 \geq 0$,
- $a_1 \geq a_2$,
- $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$.

Den konen känner vi igen!



Gitterpunkter i polyedrar

Ex: heltalspartitioner med högst två delar, forts



Nu vill vi *räkna* gitterpunkterna i konen, dvs ange den *genererande funktionen*

$$
\begin{aligned}
K(x_1, x_2) &= \sum_{(a_1,a_2)\in K\cap\mathbb{Z}^2} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \\
&= (1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \dots) + \\
&\quad + x_1 x_2 (1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \dots) + \dots \\
&= (1 - x_1)^{-1} + x_1 x_2 (1 - x_1)^{-1} + \dots \\
&= (1 - x_1)^{-1} (1 - x_1 x_2)^{-1}
\end{aligned}
$$

Gitterpunkter i polyedrar

Ex: heltalspartitioner med högst två delar, forts

Vi ser att $K(x_1, x_2) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_1x_2)}$

1. Är en rationell funktion
2. Har en *nämnare* vars faktorer svarar mot de *extremala strålarna* i K
3. Specialiserar (när man sätter $x_1 = x_2 = t$) till den rationella funktionen

$$
\begin{aligned}
(1-t)^{-1}(1-t^2)^{-1} &= \frac{1}{2}(1-t)^{-2} + \text{smått} \\
&\approx \sum_n \frac{1}{2} n t^n
\end{aligned}
$$

Så det finns ungefär $n/2$ partitioner av n med högst två delar.

Gitterpunkter i koner

Genererande funktion

För en allmänn polyhedral kon $K \subset E^n$ gäller att $K(x)$ är en rationell funktion. För att beräkna denna så kan man

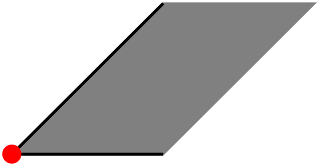
1. Triangulera K i *simpliciella koner* K_σ, dvs koner genererade av n extremala strålar
2. Räkna ut $K_\sigma(x)$. Här svarar nämnaren mot gitterpunkter på de extremala strålarna, som i vårt exempel (bäst att välja *rätt* gitterpunkter!) och täljaren mot gitterpunkter i den *fundamentala halvöppna parallellepipeden*.
3. Summera fram $K(x)$ från alla $K_\sigma(x)$ mha *inklusion-exklusion*, eller ännu hellre mha *möbiusinversion*.

Gitterpunkter i koner

Exemplet, igen

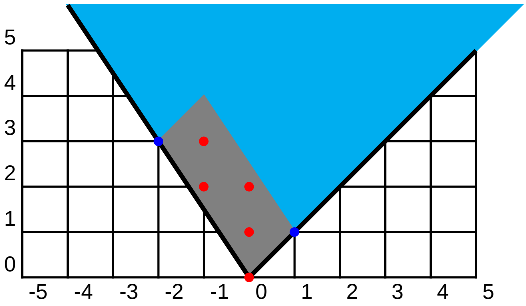
Konen i exemplet är simpliciell och har fundamental halvöppen parallellepiped $\left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| 0 \leq s, t < 1 \right\}$

Denna innehåller endast en gitterpunkt, nämligen origo, så täljaren blir 1.



Gitterpunkter i koner

Ett exempel från Beck och Robins

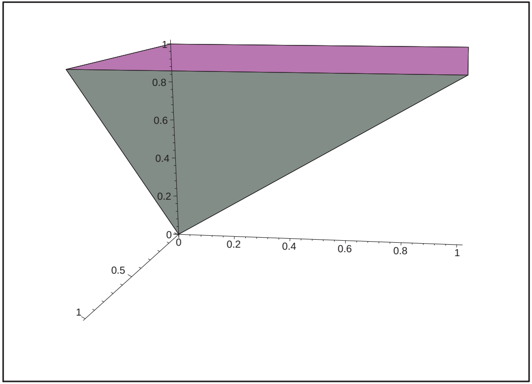


$$K(x_1, x_2) = \frac{1 + x_2 + x_2^2 + x_1^{-1}x_2^2 + x_1^{-1}x_2^3}{(1 - x_1x_2)(1 - x_1^{-2}x_2^3)}$$

Plattlägg K med translat av fundamentalparallellepipeden.

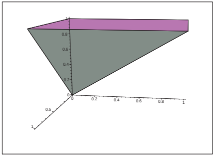
Gitterpunkter i koner

Exempel: icke-simpliciell kon som måste trianguleras

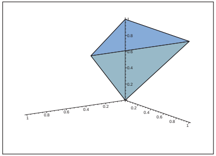


$$K = \mathrm{pos}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

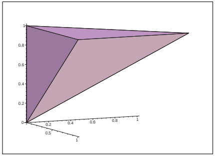
Gitterpunkter i koner



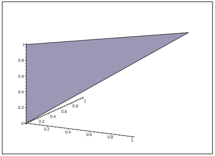
$=$



$+$



$-$



$$K(x,y,z) = K_1(x,y,z) + K_2(x,y,z) - K_3(x,y,z)$$

dvs

Gitterpunkter i koner

$$\frac{1-xyz^2}{(1-z)(1-yz)(1-xz)(1-xyz)} = \frac{1}{(1-z)(1-yz)(1-xyz)} + \frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-xyz)} - \frac{1}{(1-z)(1-xyz)}$$

Reciprocitet

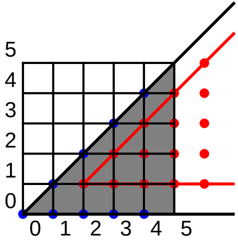
Sats (Stanley-reciprocitet för koner)

$$K(\mathbf{x}^{-1}) = \pm K^{\circ}(\mathbf{x})$$

Reciprocitet

Ex: heltalspartitioner med högst två delar, forts

Anta att vi vill räkna partitioner av n i precis två, olika delar. Vi vill då räkna gitterpunkterna i det *inre* av K



Eftersom $K^\circ = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + K$ så gäller att

$$K^\circ(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 K(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{(1 - x_1)(1 - x_1 x_2)}$$

Reciprocitet

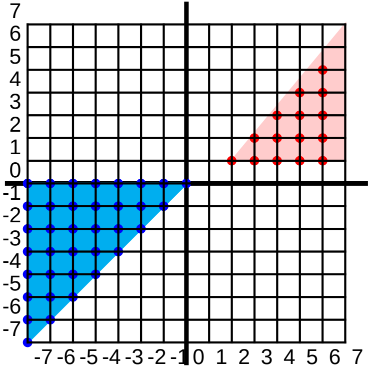
Ex: heltalspartitioner med högst två delar, forts

Stanley-reciprocitet ger följande (förbluffande?) samband:

$$
\begin{aligned}
K\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right) &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{x_1})(1 - \frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2})} \\
&= \frac{x_1 x_2 x_1 x_2}{(x_1 x_2 - x_2)(x_1 x_2 - 1)} \\
&= \frac{x_1^2 x_2}{(x_1 - 1)(x_1 x_2 - 1)} \\
&= K^\circ(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Detta är en likhet mellan rationella funktioner, inte mellan formella potensserier! (Kan ses som analytisk fortsättning...)

Reciprocitet
Förbjuden tankegång



$$\mathbb{Z}[[x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}]] \ni 1 + x_1^{-1} + x_1^{-2} + \cdots + x_1^{-1}x_2^{-1} + \cdots \neq x_1^2 x_2 + x_1^3 x_2 + \ldots$$

Reciprocitet

Tillämpning: torn av abelska grupper (med Johan Andersson)

Definition

Ett *torn av längd k* av grupper är en kedja av delgrupper

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_k$$

Vi vill uppskatta antalet torn av längd k av ändliga abelska grupper, där den största gruppen har ordning n och rank högst r.

Sats

Antalet sådana ting är asymptotiskt (då $n \to \infty$, övriga fixa) mot $c_{k,r} n \log(n)^{k-1}$, där $c_{k,r}$ är en konstant.

Reciprocitet
Tillämpning: torn av abelska grupper

Om vi använder

- Diverse redskap från analytisk talteori, såsom Dirichletserier, Eulerprodukter för sådana (Riemanns ζ dyker upp), Taubersatser mm (min kollegas specialitet)
- Fundamentalsatsen för ändliga abelska grupper (varje sådan grupp är summan av ändliga abelska p-grupper)
- Kodningen av den abelska p-grupper $\mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_r}}$ som partitionen $a_1 + a_2 + \cdots + a_r$, vilket i sin tur kan kodas som en heltalsvektor $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$

så kommer vi fram till att vi vill studera följande:
(v.v!)

Plana partitioner

Definition

$\alpha_{k,r}(n)$ är antalet $k \times r$-matriser med icke-negativa heltalselement, vilka avtar (svagt) åt höger och nedåt, och vars största (första) radsumma är n. Låt

$$F_{k,r}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k,r}(n) x^n$$

vara genererande funktionen för dessa.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ bidrar till } \alpha_{2,3}(9)$$

Matriser som denna kallas även för “plana partitioner”.

Tillämpning: torn av abelska grupper

Poängen

$F_{k,r}(x)$ är en rationell funktion, som kan beräknas med "gitter-punkter i koner"-metoder!

Tillämpning: torn av abelska grupper

Tolkning som gitterpunkter

$$K = \text{ alla } \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \text{ så att } x_{11} \geq x_{12} \geq x_{13}$$
$$\text{och } x_{21} \geq x_{22} \geq x_{23} \geq 0 \text{ och } x_{11} \geq x_{21}$$
$$\text{och } x_{12} \geq x_{22} \text{ och } x_{13} \geq x_{23} \geq 0$$

det vill säga

(v.v)

Tillämpning: torn av abelska grupper

Tolkning som gitterpunkter

alla $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}^T$ så att

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

det vill säga alla gitterpunkter i en viss kon $K \subset E^6$.

Tillämpning: torn av abelska grupper

Reciprociteten

Min kollega hade noterat (och för $r = 2$ bevisat) det han kallade en “lokal funktionalekvation”, nämligen att

$$F_{k,r}(x) = (-1)^{kr} x^{-r(r+2k-1)/2} F_{k,r}(1/x)$$

Jag observerade att det var ett fall av *reciprocitet* för gitterpunkter i koner.

Tillämpning: torn av abelska grupper

Reciprociteten

- $K \subset E^{kr}$ konen given av villkoren på x_{ij}
- $K(\mathbf{x})$ genererande funktionen (i kr variabler) för $K \cap \mathbb{Z}^{kr}$
- $K^\circ(\mathbf{x})$ genererande funktionen (i kr variabler) för $K^\circ \cap \mathbb{Z}^{kr}$, dvs för $k \times r$-matriser med *positiva* heltal, som *avtar strikt*.

Tillämpning: torn av abelska grupper

Reciprociteten

Observera nu att

$$M \mapsto M + \begin{pmatrix} k+r-1 & k+r-2 & \cdots & k+1 & k \\ k+r-2 & k+r-3 & \cdots & k & k-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r+1 & r & \cdots & 3 & 2 \\ r & r-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

är en *bijektion* mellan gitterpunkter i konen och i dess inre!

Tillämpning: torn av abelska grupper

Reciprociteten

Det följer att

$$K^\circ(\boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{r} x_{i,j}^{k+r+1-i-j}$$

Samtidigt ger Stanley-reciprocitet att

$$K^\circ(\boldsymbol{x}) = (-1)^{kr} K\left(\frac{1}{x_{1,1}}, \ldots, \frac{1}{x_{k,r}}\right).$$

Tillämpning: torn av abelska grupper

Reciprociteten

Kombinerar vi detta, och specialiserar

$$x_{i,j} = \begin{cases} x & i = 1 \\ 1 & i > 1 \end{cases}$$

eftersom

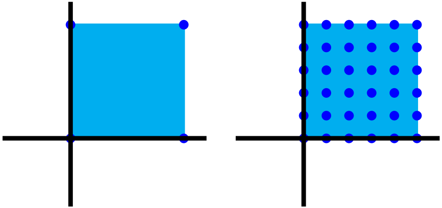
$$F_{k,r}(x) = K(x_{1,1}, \ldots, x_{1,r}, 1, \ldots, 1)$$

så får vi att

$$F_{k,r}(x) = (-1)^{kr} x^{-r(r+2k-1)/2} F_{k,r}(1/x)$$

Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

- $P \subset E^n$ heltalig polytop (av full dimension)
- $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^n$ nedskalat heltalsgitter
- $L_P(k) = |P \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n|$ Ehrhartpolynomet (jo, det blir ett polynom)
- $L_p(k) \approx \mathrm{vol}(P)k^n$

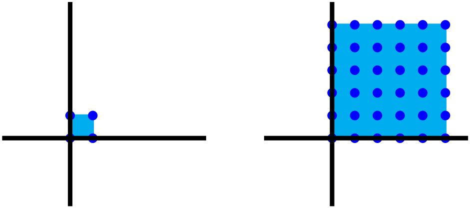


Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

Skalning

Viktig observation

$$|P \cap \tfrac{1}{k}\mathbb{Z}^n| = |kP \cap \mathbb{Z}^n|$$



Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

Koning

Viktig observation

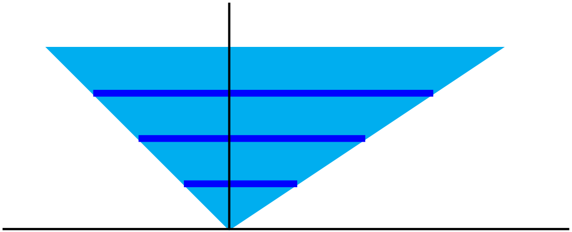
- $P' = \mathbf{e}_{n+1} + P \subset E^{n+1}$
- P' är P “lyft” till hyperplanet $x_{n+1} = 1$ i E^{n+1}.
- $c(P) = \mathrm{pos}(P') \subset E^{n+1}$
- Konen genererad av P'
- H_k hyperplanet $x_{n+1} = k$

Då gäller att (projektionen på $H_0 = E^n$ av)

$$c(P) \cap H_k = kP$$

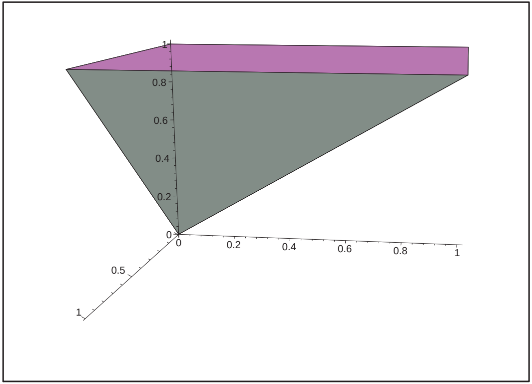
Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

Koning



Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

GF för konen ger Ehrhartpolynomet



Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

GF för konen ger Ehrhartpolynomet

$$K = c(P)$$

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1 - x_1 x_2 x_3^2}{(1-x_3)(1-x_2x_3)(1-x_1x_3)(1-x_1x_2x_3)} \\ &= 1 + (1 + x_2 + x_1 + x_1x_2)x_3 + \\ &(x_1x_2 + 1 + x_2 + {x_2}^2 + x_1 + {x_1}^2 + x_1{x_2}^2 + {x_1}^2x_2 + \\ &{x_1}^2{x_2}^2){x_3}^2 + O({x_3}^3) \end{aligned}$$

Ehrhartpolynomet till en heltalig polytop

GF för konen ger Ehrhartpolynomet

$$K(1,1,t) = \frac{1-t^2}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3} =$$

$$= 1 + 4t + 9t^2 + 16t^3 + 25t^4 + 36t^5 + \cdots = \sum_{k \geq 0} (k+1)^2 t^k$$

Alltså är Ehrhartpolynomet för enhetskvadraten

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 = 1 * \text{vol} * k^{\text{dim}} + mindre(k)$$

Ehrhartpolynomet till en heltalig 2-dim polytop

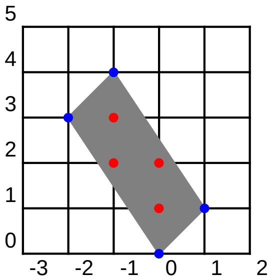
Sats

Om $P \subset E^2$ polytop med area A och B gitterpunkter på randen, så

- $L_P(t) = At^2 + \frac{B}{2}t + 1$
- $c(P)(t) = \frac{(A - \frac{B}{2}t + 1)t^2 + (A + \frac{B}{2} - 2)t + 1}{(1-t)^3}$
- Picks sats: $A = L_P(1) - \frac{B}{2} - 1$

Picks sats

$A = L_P(1) - \frac{B}{2} - 1$



$$A = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right| = 5$$

$$5 = (4 + 4) - \frac{4}{2} - 1$$

Porta

Fourier-Motzkin, lista gitterpunkter

```
water>  cat konhela.poi
DIM = 3
CONV_SECTION
CONE_SECTION
 0 0 1
 1 0 1
 0 1 1
 1 1 1
END
DIMENSION OF THE POLYHEDRON : 3

water>  traf konhela.poi
number of equations     :    0
number of inequalities  :    4
output written to file konhela.poi.ieq
```

Porta, forts

```
water>  cat konhela.poi.ieq
DIM = 3
VALID
0 0 0

INEQUALITIES_SECTION
(   1) -x1        <= 0
(   2)    -x2     <= 0
(   3)    +x2-x3  <= 0
(   4) +x1   -x3  <= 0

END
```

LinDiophantus,Omega

GF för rationella koner via MacMahons Ω-operator

```
read("/home/jasne/maple/LinDiophantus.maple");
        LinDiophantus: A Maple package that finds generating functions
      representating solutions of systems of Linear Diophantine Equations
                  It accompanies Doron Zeilberger's article:
         A Constant Term Method for Solving Systems of Linear Diophantine
                                   Equations
                 Please report bugs to zeilberg@math.temple.edu

K := subs({v[x]=x,v[y]=y,v[z]=z},
                        GFIx([x,y,z],[x,y,z-y,z-x], v));

                                     2
                                  y z  x - 1
K := - ----------------------------------------
         (x z y - 1) (z y - 1) (z x - 1) (z - 1)
```

Convex

lista alla sidor på en polyeder

```
K := poshull([0,0,0],[0,1,1],[1,0,1],[1,1,1]);
                         K := CONE(3, 3, 0, 3, 3)

L := facets(K);
    L := [CFACE(2, 1), CFACE(2, 1), CFACE(2, 1)]

rays(L[1]);
                          [[1, 0, 1], [1, 1, 1]]

rays(L[2]);
                          [[0, 1, 1], [1, 1, 1]]

rays(L[3]);
                          [[0, 1, 1], [1, 0, 1]]
```

LattE

Ehrhartpolynom

```
[jans@shell latte]$ cat kvadrat
2 3
1 -1 0
1 0 -1
nonnegative 2 1 2
[jans@shell latte]$ ./ehrhart simplify kvadrat

[jans@shell latte]$ cat kvadrat.rat
HS := -(t+1)/(t-1)/(1-2*t+t^2);
```

Referenser

1. *Enumerative Combinatorics*, vol I, **Richard Stanley**
2. *Computing the Continuous Discretely*, **Mathias Beck och Sinai Robins**
3. *On the number of plane partitions and non isomorphic subgroup towers of abelian groups*, **Johan Andersson och Jan Snellman**