Stigar i riktade grafer

Jan Snellman[1]

[1]MAI
Linköpings Universitet

Kollokvium, 15 mars, 2006

Overheadbilder tillgängliga på `www.mai.liu.se/~jasne/`

Outline

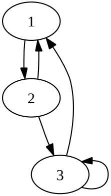
Adjacensmatriser

G enkel, riktad graf på hörnmängden $\{1, 2, \ldots, k\}$.
Adjacensmatrisen $A = (a_{i,j})$, $a_{ij} = 1$ om $i \to j$ kant, annars 0.
Låt a_n vara antalet riktade stigar i G av längd $n - 1$. Vi sätter $a_0 = 1$, $a_1 = k$).
Om $A^n = (b_{ij}^{(n)})$ så $b_{i,j}^{(n)}$ = antalet stigar av längd $n - 1$ från i till j.
Så

$$a_n = \mathbf{1} A^{(n-1)} \mathbf{1}^T, \qquad \mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1].$$

Adjacensmatriser
Exempel

Exempel:

$G =$ 

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Här är $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ och $a_3 = 8$.

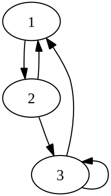
Låt $R = S/I$, där $S = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ är den fria associativa algebran, I det tvåsidiga monomidealet genererat av alla $x_i x_j$ där $i \to j$ ej kant. Då

- R är graderad: $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ och $R_r R_s \subseteq R_{r+s}$.
- R_n har en $\mathbb{C}$-bas bestående av monom $\overline{x_{i_1}} \cdots \overline{x_{i_n}}$, där

$$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n$$

  är en (riktad) stig i G av längd $n - 1$.
- Så $\dim_{\mathbb{C}} R_n = a_n$.
- R är genererad i grad 1, så faktiskt gäller att $R_r R_s = R_{r+s}$ för $r, s \geq 1$.

Exempel: Riktade stigar



. I exemplet: $I = \langle x_1^2, x_1x_3, x_2^2, x_3x_2 \rangle$

$$R_3 = \mathrm{span} \quad \overline{x_1x_2x_1}, \overline{x_1x_2x_3}, \overline{x_2x_1x_2}, \overline{x_2x_3x_1}, \overline{x_2x_3^2}, \overline{x_3x_1x_2}, \overline{x_3^2x_1}, \overline{x_3^3}$$

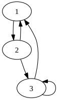
och

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Låt $R(t)$ vara Hilbertserien för R, dvs $1 + t*$ (längd-genererande funktionen för stigar i G):

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{n\geq 0} a_n t^n \\
&= 1 + t \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}(tA)^{(n-1)}\mathbf{1}^T \\
&= 1 + t \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}(tA)^{n}\mathbf{1}^T \\
&= 1 + t\mathbf{1}\left(\sum_{n\geq 0} (tA)^n\right)\mathbf{1}^T \\
&= 1 + t\mathbf{1}(E - tA)^{-1}\mathbf{1}^T \\
&= \frac{p(t)}{\det(E - tA)}, \qquad \deg(p) \leq k
\end{aligned}
$$

Exempel: Riktade stigar

$G =$ , $A = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$. Då är

$$E + tA + t^2A^2 + t^3A^3 + \ldots = (E - tA)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{t(-1+t)}{-1+t+t^2} & \frac{t^2(-1+t)}{-1+t+t^2} & -\frac{t^3}{-1+t+t^2} \\ -\frac{t^2}{-1+t+t^2} & \frac{t(-1+t)}{-1+t+t^2} & -\frac{t^2}{-1+t+t^2} \\ -\frac{t^2}{-1+t+t^2} & -\frac{t^3}{-1+t+t^2} & \frac{t\left(t^2-1\right)}{-1+t+t^2} \end{bmatrix}$$

och

$$R(t) = -\frac{1+2\,t+t^2}{-1+t+t^2} = 1 + 3\,t + 5\,t^2 + 8\,t^3 + 13\,t^4 + O\left(t^5\right)$$

Spektralradie

$$\begin{aligned}\rho(G) = \rho(A) &= \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} \\ &= \max_{\lambda \text{ egenvärde till } A} |\lambda| \\ &= \min_{\sigma \text{ pol till } R(t)} \frac{1}{|\sigma|}\end{aligned}$$

Perron-Fröbenius: $\rho(G)$ alltid egenvärde till A, om G "snäll" så övriga egenvärden har mindre norm.
$a_n = c\rho(G)^n + l.o.t.$. Så $\rho(G)$ bestämmer hur många "långa" stigar det finns i G.
I exemplet: $\rho(G) = (\sqrt{5}+1)/2$.

Maximera antalet korta stigar givet antalet kanter

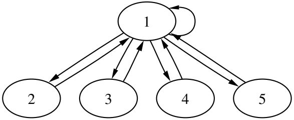
Maximera a_3 givet a_2

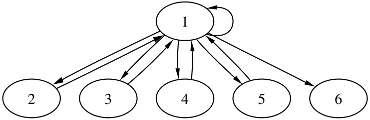
Theorem

Backelin Om $a_2 > 6$ *är fixt så är*

$$a_3 \leq \begin{cases} r^2 + r - 1 & a_2 = 2r - 1 \\ r^2 + 2r + 1 & a_2 = 2r \end{cases}$$

med likhet omm G *är stjärngrafen* $St(a_2)$,





Ej känt hur maximera a_4 givet a_2, för allmännt a_2. Känt om a_2 är en jämn kvadrat!

Eftersom $R_r R_s = R_{r+s}$ för $r, s \geq 1$ så

$$a_r a_s \geq a_{r+s}$$

så

$$a_4 \leq a_2^2$$

och

$$\rho(G) \leq a_n^{1/n} \qquad \text{för alla } n.$$

Speciellt, om $a_2 = r^2$ så kan vi ta G till den fullständiga riktade grafen, vilken maximerar såväl a_4 som $\rho(G)$.

Det är naturligt att tänka sig att om a_2 nära en jämn kvadrat så skall man ta G nära den fullständiga riktade grafen för att maximera a_4 och spektralradien.
Friedman visade detta för $a_2 = k^2 + s$, s fixt, k "tillräckligt stort" i förhållande till s.

Theorem

Fixera $s > 6$. För tillräckligt stora k så gäller att spektralradien för digrafer med $k^2 - s$ kanter och k hörn maximeras av digrafen $\overline{St(s)}$, den komplementära stjärngrafen.

Ex: $s = 7$, $k = 6$ tillräckligt stort.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har maximal spektralradie bland 6x6 01-matriser med $6^2 - 7$ ettor.

Troligt: bäst bland alla 01-matriser med $6^2 - 7$ ettor.

Theorem

Maximala spektralradien för digrafer med $k^2 - s$ kanter uppnås för en digraf isomorf med $\overline{\mathcal{G}(\lambda)}$, där λ är en partition av s.

Exempel: $\lambda = [3, 2, 1]$, $k = 5$,

$$A(\mathcal{G}(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(\overline{\mathcal{G}(\lambda)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R = T(V)/I$, I genererat av $W \subset V \otimes V$. Gäller speciellt om R kommer från graf G som tidigare.
Låt $R^! = T(V^*)/J$, J genererat av $W^T \subset (V \otimes V)^T \simeq V^T \otimes V^T$.

Theorem

$R^!(t) = 1/R(-t)$

Om R kommer från graf G så kommer $R^!$ från $\overline{G}$. Vårt exempel:

$$A(\overline{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(\overline{G})(t) = -\frac{t^2-t-1}{t^2-2t+1} = 1 + 3\,t + 4\,t^2 + 5\,t^3 + O\left(t^4\right)$$

Bevisskiss

Låt $s > 6$, $G_1 = \overline{St(s)} = \overline{\mathcal{G}(\lambda_1)}$, $G_2 = \overline{\mathcal{G}(\lambda_2)}$, $\lambda_1 = [\lceil s/2 \rceil, 1, \ldots, 1]$ "hook", $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Komplement m.a.p. fullst. riktade grafen med k hörn, kommer att låta k växa. Räcker visa $\rho(G_1) > \rho(G_2)$ för stora k, eftersom det bara finns ändlig många partitioner av s.

$$
\begin{aligned}
R_1(t) &= \frac{1}{1 - kt + st^2 - dt^3 + t^4 p_1(t)/q_1(t)} \\
R_2(t) &= \frac{1}{1 - kt + st^2 - et^3 + t^4 p_2(t)/q_2(t)}
\end{aligned}
$$

där p_1, p_2, q_1, q_2 ej beror av k.
Följer att $a_n(R_1) - a_n(R_2)$ är ett polynom i k med grad $n-3$, ledande koeff $(n-2)(d-e)$. Backelin: $d > e$. Alltså: $a_n(R_1) > a_n(R_2)$ för stora n.

Låt $r_1(k) =$ pol närmast origo till $R_1(t)$, dvs minsta pos nollställe till

$$(1 - kt + st^2 - dt^3)q_1(t) + t^4 p_1(t).$$

Låt p.s.s. $r_2(k)$ vara minsta pos nollställe till

$$(1 - kt + st^2 - et^3)q_2(t) + t^4 p_2(t).$$

Vi kan utveckla r_1, r_2 som en Puisseuxserie i $1/k$, och får

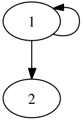
$$r_1 = k^{-1} + sk^{-3} - dk^{-4} + \dots$$
$$r_2 = k^{-1} + sk^{-3} - ek^{-4} + \dots$$

Eftersom $d > e$ så $r_1 < r_2$ för tillräckligt stora k, vilket skulle bevisas.

Exceptionella fall $s < 6$

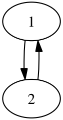
$s = 2$

För $s = 2$ så har stjärngrafen



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och grafen

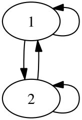


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

samma Hilbertserie, nämligen $\frac{1+t}{1-t}$, så motsvarande komplementära grafer har båda optimal spektralradie.

För $s = 3, 5$ så är stjärngrafen bäst.

För $s = 4$ så har

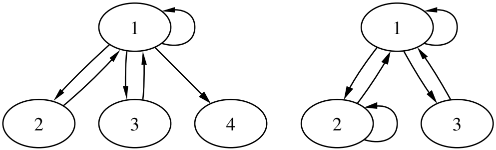
$G =$ 

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

flest stigar av längd 2 bland digrafer med 4 kanter, dvs **fler än stjärngrafen**, så störst spektralradie för matriser med $k^2 - 4$ ettor fås genom

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$s = 6$



För $s = 6$ så har stjärngrafen G_1 med adjacensmatris

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ lika många stigar av längd 2 som digrafen G_2

med adjacensmatris $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, nämligen 14.

Hilbertserierna är

$$-\frac{1+3\,t}{-1+t+2\,t^2} = 1+4\,t+6\,t^2+14\,t^3+26\,t^4+O\left(t^5\right)$$
$$\frac{1+2\,t-3\,t^2-t^3+t^4}{1-2\,t-t^2+t^3} = 1+4\,t+6\,t^2+14\,t^3+31\,t^4+O\left(t^5\right)$$

Den andra serien är större, men eftersom den är större först i grad 4, kommer komplementet att bli mindre!

Hilbertserierna för komplementen är

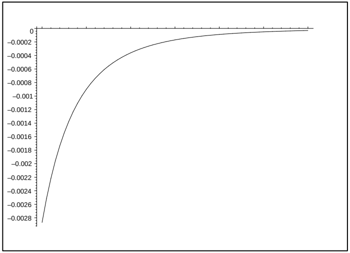
$$
\begin{aligned}
R_1(t) = \frac{p_1(t)}{p_2(t)} &= \frac{1 + t - 2t^2}{1 - kt - kt^2 + 3t^2 + 2kt^3 - 6t^3} \\
&= 1 + (1 + k)\, t + \left(-5 + 2\, k + k^2\right) t^2 + \\
&\quad \left(-9\, k + 3 + 3\, k^2 + k^3\right) t^3 + \\
&\quad \left(-4\, k + 21 - 12\, k^2 + 4\, k^3 + k^4\right) t^4 + O\left(t^5\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_2(t) = \frac{q_1(t)}{q_2(t)} &= \frac{1 + 2t - t^2 - t^3}{1 + t - kt + 3t^2 - 2kt^2 - 2t^3 + kt^3 - 2t^4 + kt^4} \\
&= 1 + (1 + k)\, t + \left(-5 + 2\, k + k^2\right) t^2 + \\
&\quad \left(-9\, k + 3 + 3\, k^2 + k^3\right) t^3 + \\
&\quad \left(16 - 4\, k - 12\, k^2 + 4\, k^3 + k^4\right) t^4 + O\left(t^5\right)
\end{aligned}
$$

Låt $r_1(k), r_2(k)$ vara närmaste poler, dvs minsta pos rötter till $p_2(t), q_2(t)$. Då

$$r_1(k) = k^{-1} - k^{-2} + 7k^{-3} - 33k^{-4} + 191k^{-5} + O(k^{-6})$$
$$r_2(k) = k^{-1} - k^{-2} + 7k^{-3} - 33k^{-4} + 196k^{-5} + O(k^{-6}).$$

Alltså har stjärngrafen aningen större spektralradie (mindre pol). Faktiskt är $r_1(k) - r_2(k) < 0$ för alla $k \geq 5$:



Ett bevis för detta fås genom att

1. beräkna att $r_1(5) - r_2(5) < 0$,
2. konstatera att om $k = k_0$ är ett nollställe till $r_1(k) - r_2(k)$ så är $(k_0, r_1(k_0))$ en punkt på den algebraiska varieten $Z(I)$, där I är idealet i $\mathbb{Q}[k, t]$ genererat av $p_2(k, t), q_2(k, t)$.
3. beräkna en lexikografisk Gröbnerbas för I. En sådan blir

$$[82 + 5\,k^2 - 41\,k, -5\,k + 2\,t + 21].$$

4. beräkna att $82 + 5\,k^2 - 41\,k$ har rötterna

$$\frac{41}{10}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{41}}) \approx 3.46,\ 4.74$$