Kommutativa och icke-kommutativa termordningar

Jan Snellman

[1]Department of Mathematics
Stockholm University

[2]Department of Mathematics
University of Linköping

12 dec 2008

Översikt

Kommutativa och icke-kommutativa monom

Definition

Låt $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vara ett ändligt alfabet. Beteckna den fria monoiden på X med X^* (alla ord i X, produkt konkatenering). Beteckna den fria kommutativa monoiden med $[X]$.

Exempel

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 x_2 x_1 \neq x_1^2 x_2 \in X^*$.

Vi har att $[X]$ är isomorf med $\mathbb{N}^n$, under exponentisomorfin

$$\mathbb{N}^n \ni \alpha \mapsto x^\alpha$$

Kommutativa termordningar

Definition

En kommutativ termordning $\succ$ på $[X]$ är en totalordning (linjär ordning) som är en multiplikativ extension av delbarhetspartialordningen, dvs

1. $\succ$ totalordning,
2. $m \succ 1$ för alla $m \in [X] \setminus \{1\}$,
3. $m_1 \succ m_2 \implies m_1 t \succ m_2 t$.

Lemma (Dickson)

$\succ$ är en välordning, dvs finns inga oändliga nedstigande kedjor

$$m_1 \succ m_2 \succ m_3 \succ \cdots$$

Exempel

Låt $X = \{x, y\}$*, inför ordning*

$$x^a y^b \succ x^c y^d \quad \iff \quad a + \sqrt{2}b > c + \sqrt{2}d$$

Denna termordning har ordningstyp ω*, dvs för varje monom* $x^a y^b$ *gäller att det bara finns ändligt många* $x^c y^d$ *med* $x^a y^b \succ x^c y^d$*.*

Exempel

Låt $X = \{x, y\}$*, inför ordning*

$$x^a y^b \succ x^c y^d \quad \iff \quad a > c \text{ eller } (a = c \text{ och } b > d$$

Denna termordning (lexikografisk) har ordningstyp ω^2*, ty: låt* $A_a = \{\, x^a y^b \,:\, b \in \mathbb{N} \,\}$*. Då*

- *Restriktionen till* A_a *har ordningstyp* ω*,*
- $[X] = \cup_{a \in \mathbb{N}} A_a$*,*
- *Om* $m \in A_a, m' \in A_{a'}$*,* $a > a'$ *så* $m \succ m'$*.*

Exempel

Låt $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$*, inför ordning*

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \succ x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

omm

$$\sum a_i > \sum b_i$$

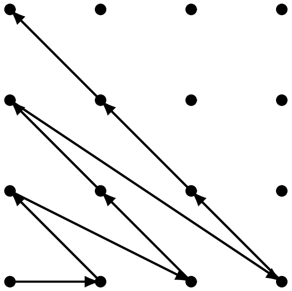
eller

$$\sum a_i = \sum b_i \text{ och } a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_{j+1} = b_{j+1}, a_j < b_j.$$

Denna termordning (degrevlex) har ordningstyp ω*, liksom alla grad-kompatibla termordningar.*

Term orders on $[X_n]$

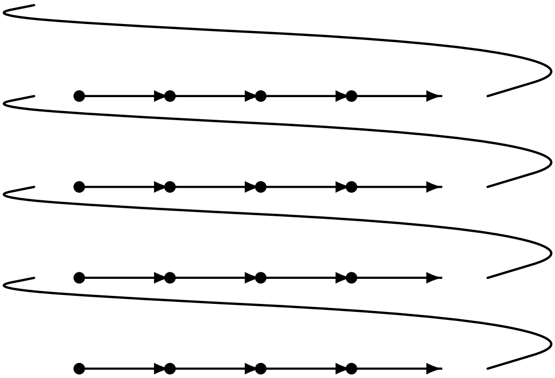
Total degree, then lex, $n = 2$



Total degree, then lex, with $x_1 < x_2$, has order type ω.

Term orders on $[X_n]$

Lex, $n = 2$



Lex, with $x_1 < x_2$, has order type ω^2.

Standardtermordning

Vi normaliserar termordningarna genom att fixera någon ordning på variablerna, tex

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots x_n$$

Exempel

Låt oss anta 3 var, $z < y < x$. Monomen av grad 2 ordnas såhär av lex:

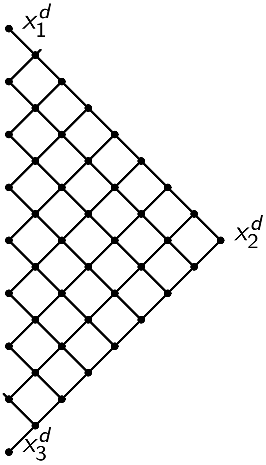
$$x^2 > xy > xz > y^2 > yz > z^2$$

och såhär av degrevlex:

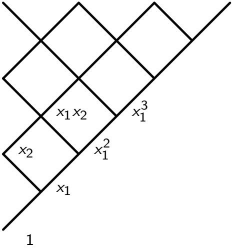
$$x^2 > xy > y^2 > xz > yz > z^2$$

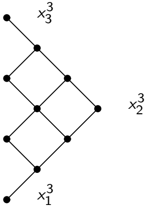
Det är klart att varje standarttermordning kommer att ha $yz > z^2$; det är en konsekvens av $y > z$ (multiplicera med z).
Låt P stå för partialordningen av alla sådana konsekvenser, dvs snittet av alla standardtermordningar! Antikedjor i P är då par av monom m_1, m_2 så att en del standardtermordningar ordnar $m_1 > m_2$ andra tvärtom.

The Hasse diagram for the strongly stable partial order for $n = 3$.



Left: $n = 2$, Right: restricted to monomials of degree 3, $n = 3$.

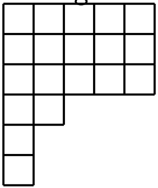




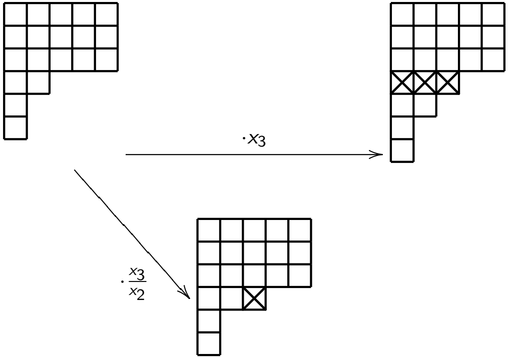
It turns out that P is isomorphic to the set of Ferrers diagrams with at most n columns, ordered by inclusion. The isomorphism is as follows:

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mapsto (\underbrace{n, \ldots, n}_{a_n}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1}) \tag{1}$$

The number of rows correspond to the total degree of the monomial. Below: the Ferrers diagram corresponding to $x_1^2 x_2 x_5^3$.



One can show that (2) is order-preserving with order-preserving inverse. We illustrate this below with $x_1^2x_2x_5^3 \cdot x_3$ and $x_1^2x_2x_5^3 \cdot \frac{x_3}{x_2}$.



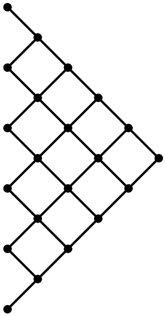
P is Young

$$
\begin{aligned}
([X], P) &\simeq Y \text{ Young's lattice} \\
([X_n], P) &\simeq \text{ At most } n \text{ rows} \\
([X_n]_d, P) &\simeq \text{ At most } n \text{ rows, exactly } d \text{ columns} \\
&\simeq \text{ At most } n \text{ rows, at most } d-1 \text{ columns}
\end{aligned}
$$

$[X_n]_d, P)$ has following properties:

- Sperner
- Rank-symmetric
- Rank-unimodular
- Rank numbers given by coeffs of q-binomial polynomials

q-binomial ranks



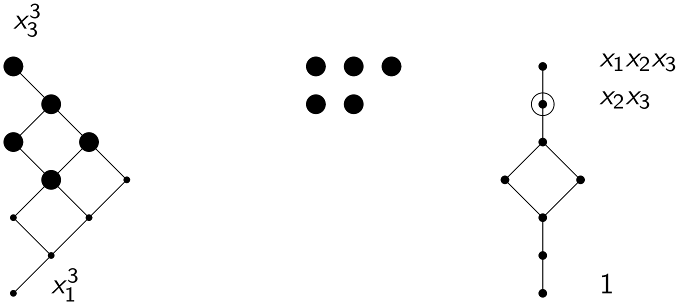
1
1
2
2
3
3
3
2
2
1
1

$$\frac{\left(1-q^{6}\right)\left(1-q^{7}\right)}{\left(1-q\right)\left(1-q^{2}\right)} = q^{10}+q^{9}+2\,q^{8}+2\,q^{7}+3\,q^{6}+3\,q^{5}+ 3\,q^{4}+2\,q^{3}+2\,q^{2}+q+1$$

Filters in $([X_3]_d, P)$

Following iso:

1. Filters in $([X_3]_d, P)$
2. Partitions into distinct parts $\leq d + 1$,
3. $(\Delta([X_3]), P)$, P restricted to square-free monomials.



Gruppordningar

En termordning $\succ$ på $[X]$ ger uppenbarligen en ordning (som vi också kallar $\succ$) på $\mathbb{N}^n$. Denna utvidgas unikt till $\mathbb{Z}^n$ mha

$$\alpha = \alpha^+ - \alpha^- > \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^+ + \beta^- \succ \beta^+ - \beta^-$$

Vi har nu

$$\alpha \succ \beta \quad \Longleftrightarrow \alpha - \beta \succ 0,$$

så vi kan ange en termordning mha dess *positiva kon*. Det är ännu bekvämare att utvidga till $\mathbb{Q}^n$ (lätt, eller hur?). Givet $\succ$, sätt

$$P = \{\, \alpha \in \mathbb{Q}^n \,:\, \alpha \succ 0 \,\}.$$

Då

- $Q^n = P \cup -P \cup 0$,
- $P + P \subseteq P$,
- P innehåller positiva orthanten (utom 0).

Bild på pos kon till lex, deglex, $(1, \sqrt{2})$.

Klassifikation av termordningar

Theorem

Gruppordningar på $\mathbb{Q}^n$ specificeras av

- *ett heltal s, $1 \leq s \leq n$,*
- *en (heltals)partition λ av n,*
- *s stycken vektorer $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^n$, var och en angiven upp till skalning. Dessa skall uppfylla:*
    - *komponenterna i u_i spänner ett λ_i-dim Q-vektorunderrum till $\mathbb{R}$,*
    - *u_i ligger i $\mathbb{R}$-höljet till $u_1, \ldots, u_{i-1}$,*
    - *Om $v \in \mathbb{N}^n$ så är första icke-noll koordinaten i $(u_1, \ldots, u_s) \circ v \in \mathbb{R}^s$ positiv.*

Vidare: finns en enda standardtermordning med ordningstyp ω^n, nämligen lex; överuppräkneligt många av typ ω^k, $1 \leq k \leq n-1$.

Bilder på $(1, \sqrt{2})$, lex.

Definition

Låt $S \subset \mathbb{N}^n$, $\succ_1, \succ_2$ termordningar. Vi säger att de är ekvivalenta på S om deras restriktion till S sammanfaller.

Theorem

Om S ändligt så finns bara ändligt många ekvklasser av termordningar, och varje ekvklass innehåller en viktordning given av en linjärform med rationella (heltaliga om man så vill) koordinater.

Fråga: hur många olika termordningar på låda med sidlängd d, $[-d, d]^n$?.
Bild för $n = 2$.

Svar: $1 + \phi(2,d)$, där $\phi(2,d)$ anger antalet gitterpunkter i $[-d,d]^2$ vars koordinater är rel prima, dvs (Dirichlet, Mertens)

$$\phi(2,d) = \frac{d^2}{\zeta(2)} + l.o.t(d).$$

Weispfennig: för $n > 2$ så antalet icke-ekv termord på $[-d,d]^n$ mellan $c_1 d^{(n^2+n-2)/2}$ och $c_2 d^{n(2^n-1)}$.
Fråga: vilken potens blir det?

Pomängdsprobabilitet

Relaterad frågeställning: definiera betingade sannolikheten

$$P(x_1^2 > x_2^3 \mid x_1 > x_2) = \lim_{d \to \infty} \frac{\text{ant t.o. på}[-d,d]^2 \text{ med } x_1^2 > x_2^3 \text{och} x_1 > x_2}{\text{ant t.o. på}[-d,d]^2 \text{ med } x_1 > x_2}$$

Bild.

Ges av icke-singulärt sannolikhetsmått på cirkeln?

Non-commutative term orders

Definition

$\leq$ is a standard term order on X^* (or on X_n^*) iff

1. $\leq$ is a total order on X^*
2. $1 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$,
3. $u \leq v \implies sut \leq svt$.

Higman's lemma $\implies$ $\leq$ well-order.

Obs: lex ej längre termordning! Däremot fungerar deglex.
$x_1 > 1$, $x_2 x_1 < x_1$.

Non-commutative term orders

Classification:

- X_1^*: only $1 < x_1 < x_1^2 < x_1^3 < \cdots$, order type ω.
- X_2^*: Possible order types are
  - ω, given by linear forms on commutativized word, uncountably many.
  - ω^2, matrix orderings, uncountably many.
  - ω^ω, Kachinuki, unique.
- X_n^*: maximal order type still ω^ω?

Recursive term orders, Kachinuki

$u, v \in X_2^*$, u has a occuring x_2, v has b occuring x_2. Write

$$u = yu', \quad v = yv', \quad u, v \text{ has no common non-empty prefix.}$$

Kachinuki ordering

$u > v$ iff either

1. $a > b$, or
2. $a = b$ and $u \neq v$ and $v' = 1$ (empty string) or $v' = x_2 z$, $z \in X_2^*$.

Basically the only standard term order of order type ω^ω.

Delar av ML2005, sedan

- Möbiusfunktionen?
- Antal icke-ekv termordn på monom av grad $\leq d$, eller varje variabel $\leq d$,
- Pomängdsprobabilitet igen.