Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
Juni 03, 2021
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 8p räcker för betyg 3, 11p för betyg 4, 14p för betyg 5.

1) Låt T vara en rätvinklig triangel vars sidlängder är heltal. Visa att arean av T är ett heltal.

2) Låt x ha den så småningom periodiska kedjebråksutvecklingen $[1; \overline{2, 3}]$. Bestäm x.

3) Låt $2 < p < q$ vara primtal, och antag att heltalet a är relativt primt med p och med q.

   (a) Om $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = 1$, vad kan sägas om lösbarheten för kongruensekvationen
$$x^2 \equiv a \mod pq$$

   (b) Om $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = -1$?

   (c) Om $\left(\frac{a}{p}\right) \neq \left(\frac{a}{q}\right)$?

4) Låt $f(x) = x^4 - 1$.

   (a) Ange alla nollställen till $f(x)$ i $\mathbf{Z}_{125}$

   (b) Ange alla nollställen till $f(x)$ i $\mathbf{Z}_{49}$

   (c) Om $n > 2$, ge en skarp undre gräns för antalet nollställen till $f(x)$ i $\mathbf{Z}_n$.

5) Hitta alla lösningar i par (x, y), med x, y Gaussiska heltal, till den linjära Diofantiska ekvationen
$$(2 + i)x + (1 + i)y = i$$

6) Följande tabell visar att 2 är en primitiv rot modulo 29.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$2^k \mod 29$	1	2	4	8	16	3	6	12	24	19	9	18	7	14	28
k	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
$2^k \mod 29$	27	25	21	13	26	23	17	5	10	20	11	22	15	1	

Lös nu
$$7^x \equiv -5 \mod 29$$

7) Visa att för varje positivt heltal n så
$$\mu(n)^2 = \sum_{d|n} \mu(d) 2^{\omega(n/d)}$$
där $\omega(k)$ anger antalet distinkta primfaktorer i k.