Lösningsförslag
Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
22 Oktober 2021
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

1) Vad är den minsta primfaktorn till $28! + 1$?

   Svar: 29 är ett primtal, så enligt Wilsons sats har vi att $(29-1)!+1$ är delbart med 29. Om $p|28!$ så $p \not|(28!+1)$, så mindre primtal delar inte $28!+1$.

2) Primfaktorisera 666 över de Gaussiska heltalen, dvs skriv 666 som en produkt av Gaussiska primtal.

   Svar: $666 = 2 * 3^2 * 37 = (1+i)(1-i)3^2(6+i)(6-i)$.

3) Kan 666 skrivas som en summa av två kvadrater av heltal? I så fall, gör det.

   Svar: Eftersom alla primfaktorer kongruenta med 4 förekommer med jämn multiplicitet så går det; ett exempel är $21^2 + 15^2$.

4) Lös kongruensen $x^3 \equiv 12 \mod 169$.

   Svar: Låt $f(x) = x^3 - 12$. Mod 13 har $f(x)$ nollställena $4, 10, 12$. Eftersom $f'(x) = 3x^2$ så är $f'(4) \equiv 9 \mod 13$, $f'(10) \equiv 1 \mod 13$, $f'(12) \equiv 3 \mod 3$, så samtliga nollställen Hensel-lyfter unikt till nollställen modulo 169. Dessa lyft är $17, 36, 116$.

5) Vad är pre-period och period för decimalutvecklingen av $119/138$?

   Svar: Enligt sats 12.4 i Rosen så skriver vi $b = 10$, $119/138 = r/s$, $138 = s = TU = 2 * 69$. Vi har att $\mathrm{ord}_U(b) = \mathrm{ord}_{69}(10) = 22$, så periodlängden är 22. Pre-periodlängden är N, minsta positive heltal så att $T|b^N$, dvs så att $2|10^N$, så $N = 1$.

   Detta stämmer med att

   $$119/138 = 0.8\overline{6231884057971014492753}$$

6) Vad är pre-period och period för kedjebråksutveckligen av $\sqrt{22}$?

   Svar: För en icke-kvadrat n så är det känt att

   $$\sqrt{n} = [\lfloor\sqrt{n}\rfloor; \overline{a_1, \ldots, a_p}]$$

   med $a_{p-1} = a_1$, $a_{p-2} = a_2$ osv, och $a_p = 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Speciellt så är preperiodlängden ett.

   Vi behöver inte känna till detta för att beräkna att $\sqrt{22} = [4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$ så preperiodlängden är 1 och periodlängden 6.

7) Visa att $\phi(n^2) = n\phi(n)$.

   Svar: Faktorisera $n = \prod_j p_j^{a_j}$, $n^2 = \prod_j p_j^{2a_j}$. Då är

   $$\phi(n^2) = \prod_j (p_j^{2a_j} - p_j^{2a_j - 1})$$

   $$n\phi(n) = \prod_j p_j^{a_j} \prod_j (p_j^{a_j} - p_j^{a_j - 1}) = \prod_j (p_j^{2a_j} - p_j^{2a_j - 1})$$