Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1
17 augusti 2023
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 8p räcker för betyg 3, 11p för betyg 4, 14p för betyg 5.

Med μ avses Möbiusfunktionen, den multiplikativa funktion som uppfyller $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ för p primtal, och $\mu(n) = 0$ för alla $n > 1$ som delas av kvadraten av ett heltal. Med ϕ avses Eulers phi-funktion, som räknar antalet multiplikativt inverterbar kongruensklasser modulo n.

1) Hitta alla lösningar till kongruensen

$$x \equiv 7 \mod 55$$
$$x \equiv 18 \mod 77$$

2) Låt $\omega(n)$ ange antalet distinkta primtal i primtalsfaktoriseringen av det positiva heltalet n. Visa att $n \mapsto 2^\omega(n)$ är multiplikativ. Beräkna sedan (ge en explicit formel som får bero av primtalsfaktoriseringen av n)

$$\sum_{d|n} 2^{\omega(d)}.$$

3) Låt $p = 23$, $a = 5$. Det gäller att $(a+p)^{11} \equiv -1 \mod p^2$. Använd detta för att bestämma $\mathrm{ord}_{p^3}(a)$.

4) Låt $\alpha = 18 + 15i$, $\beta = 3 + 4i$. Bestäm alla par γ, ρ av Gaussiska heltal så att

$$\alpha = \gamma\beta + \rho, \qquad N(\rho) < N(\beta)$$

5) Visa att det finns oändligt många primtal på formen $8k + 3$.

6) Bestäm alla heltalslösningar till

$$(x+u)(x-u) + (y+v)(y-v) = 2uv, \qquad 1 \leq u \leq x,\ 1 \leq v \leq y,$$

med $\mathrm{sgd}(x, y) = 1$ och y jämn.

7) Hitta ett rationellt tal r/s med $|s| < 50$ och $|279/599 - r/s| < 10^{-3}$.