Talteori

Vad är talteori?

Jan Snellman[1]

[1]Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Föreläsningsanteckningar på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA54/`

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Summary

Analytisk talteori
- Primtalsräkning
- Partitioner

"Geometry of Numbers"
- Gitterpunkter i konvexa kroppar

Aritro-algebraisk geometri
- Pythagoreanska tripplar

Kopplingar till algebra
- Ingår i kursen:
- Inte i kursen

Elementär talteori
- Elementär?

Denna kurs
- Litteratur
- Föreläsningar

Summary

Analytisk talteori
- Primtalsräkning
- Partitioner

"Geometry of Numbers"
- Gitterpunkter i konvexa kroppar

Aritro-algebraisk geometri
- Pythagoreanska tripplar

Kopplingar till algebra
- Ingår i kursen:
- Inte i kursen

Elementär talteori
- Elementär?

Denna kurs
- Litteratur
- Föreläsningar

Summary

Analytisk talteori
- Primtalsräkning
- Partitioner

"Geometry of Numbers"
- Gitterpunkter i konvexa kroppar

Aritro-algebraisk geometri
- Pythagoreanska tripplar

Kopplingar till algebra
- Ingår i kursen:
- Inte i kursen

Elementär talteori
- Elementär?

Denna kurs
- Litteratur
- Föreläsningar

Summary

Analytisk talteori
- Primtalsräkning
- Partitioner

“Geometry of Numbers”
- Gitterpunkter i konvexa kroppar

Aritro-algebraisk geometri
- Pythagoreanska tripplar

Kopplingar till algebra
- Ingår i kursen:
- Inte i kursen

Elementär talteori
- Elementär?

Denna kurs
- Litteratur
- Föreläsningar

Summary

Analytisk talteori
- Primtalsräkning
- Partitioner

"Geometry of Numbers"
- Gitterpunkter i konvexa kroppar

Aritro-algebraisk geometri
- Pythagoreanska tripplar

Kopplingar till algebra
- Ingår i kursen:
- Inte i kursen

Elementär talteori
- Elementär?

Denna kurs
- Litteratur
- Föreläsningar

Summary

Analytisk talteori
- Primtalsräkning
- Partitioner

"Geometry of Numbers"
- Gitterpunkter i konvexa kroppar

Aritro-algebraisk geometri
- Pythagoreanska tripplar

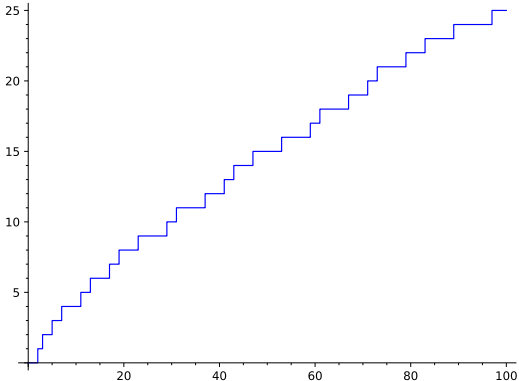
Kopplingar till algebra
- Ingår i kursen:
- Inte i kursen

Elementär talteori
- Elementär?

Denna kurs
- Litteratur
- Föreläsningar

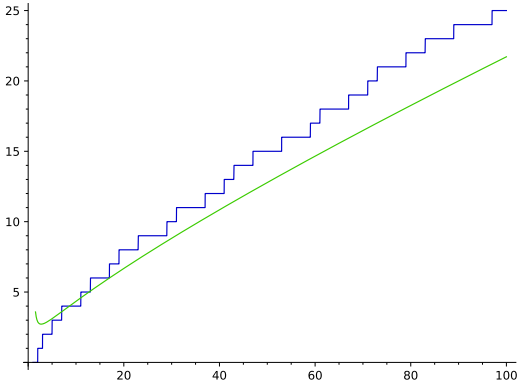
Definition

$\pi(x) = \sum_{k \leq x} \mathrm{IsPrime}(k)$



Teorem (Primtalssatsen, Hadamard, de la Vallée Poussin)

$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ *då* $x \to \infty$.




Harcourt
Paris

Definition

Primtalstäthetsfunktion $\pi(x)/x$.

Teorem

$\pi(x)/x \sim 1/\log(x)$.

Bevis.

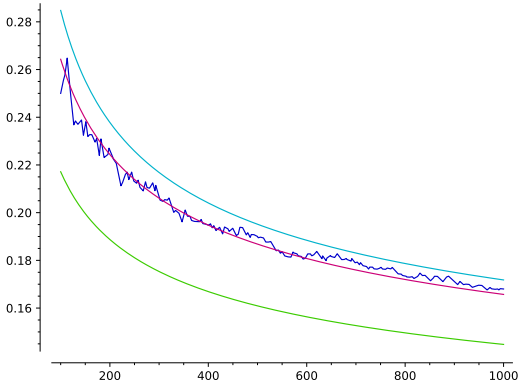
Följer av primtalssatsen. □

Exempel

Sannolikheten att ett positivt heltal ≤ 1000 är ett primtal är $p(1000)/1000 \approx \frac{1}{\log(1000)} = 0.145$. I själva verket finns 168 primtal ≤ 1000.

Teorem

$\pi(x)/x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k-1)!}{\log(x)^k} + \mathcal{O}\left(\frac{(n-1)!}{(log(x)^n)}\right)$ *as* $x \to \infty$.



De tre första approximationerna:

Definition

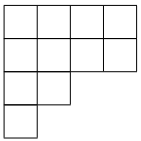
n positivt heltal. En (heltals)partition $\lambda \vdash n$ är en svagt avtagande heltalsföljd som summerar till n.

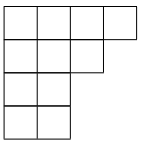
Exempel

$\lambda = (3, 3, 2, 1, 1, 1) \vdash 11$. Det finns 7 partitioner av 5, nämligen

$$[[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1, 1], [2, 2, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1]]$$

- *Young-diagrammet* av en partition är en hög lådor, svarande mot delarnas storlek
- Konjugatet till en partition fås genom att svänga runt diagrammet
-

$\lambda = (4, 4, 2, 1) =$ 

$\lambda^* = (4, 3, 2, 2) =$ 

- Ger bijektion mellan partitioner med högst k delar och partitioner vars delar är $\leq k$

Exempel

- Högst 4 delar, eller storlek på delar ≤ 4
- c_j räknar antal sådana partitioner av j
- $p_4(x) = \sum_{j \geq 0} c_j x^j$ generande funktion
- $p_4(x) = 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + \mathcal{O}\left(x^7\right)$
- Lätt att se att $p_4(x) = \frac{1}{(x^4-1)(x^3-1)(x^2-1)(x-1)}$
- Partialbråksuppdelning: $p_4(x) = \frac{x+1}{9\,(x^2+x+1)} + \frac{1}{8\,(x^2+1)} + \frac{1}{8\,(x+1)} - \frac{17}{72\,(x-1)} + \frac{1}{32\,(x+1)^2} + \frac{59}{288\,(x-1)^2} - \frac{1}{8\,(x-1)^3} + \frac{1}{24\,(x-1)^4}$
- Ger asymptotisk växt av c_j (som funktion av j)

Definition

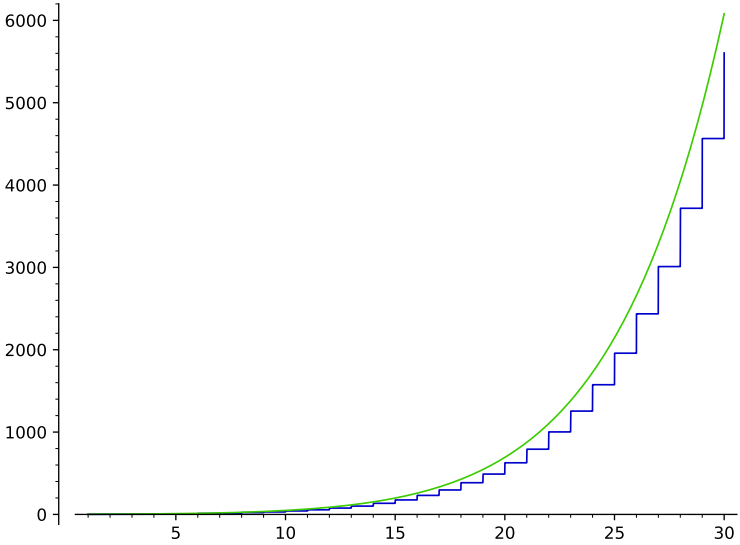
$p(n)$ antal partitioner av n.

Lemma (Lätt)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

Teorem (Hardy-Ramanujan)

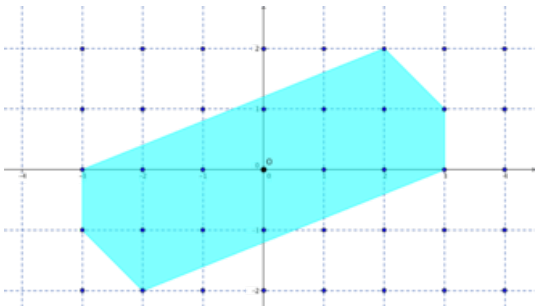
$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$ *as* $n \to \infty$.


6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
5
10
15
20
25
30

G. H. Hardy

Teorem (Minkowski)

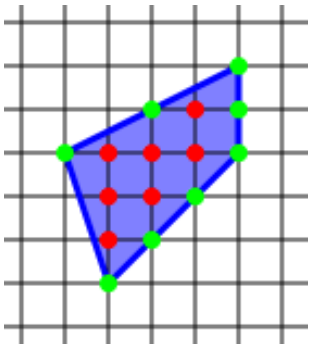
$D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, volym $> 2^n$, $-D = D$. Då innehåller D gitterpunkt skild från origo.



Teorem (Pick)

A area av konvex polygon i planet vars hörnpunkter är gitterpunkter, i antal inre gitterpunkter, b antal randpunkter. Då

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$



$i = 7, b = 8, A = i + b/2 - 1 = 10$

Vi kommer att bestämma de Pythagoreanska tripplarna!

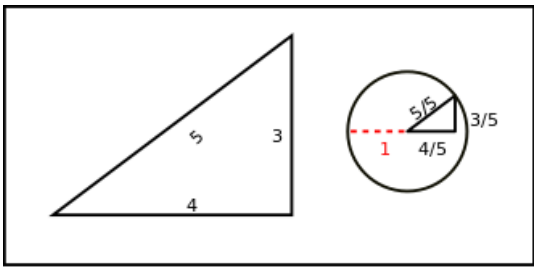
Teorem

Heltalslösningar till

$$a^2 + b^2 = c^2$$

svarar mot rational punkt $(a/c, b/c)$ *på enhetscirkeln, kan parametriseras med*

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$



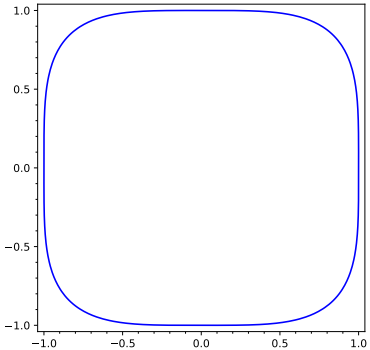
Beviset går utanför kursen...

Teorem (Fermats förmodan)

För $n \geq 3$ så saknar ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

icke-triviala heltalslösningar.



Algebrarelaterade spörsmål i kursen:

- Gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ är cyclisk då n är primtalspotens
- $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm $\gcd(m, n) = 1$, samma för $\mathbb{Z}_{mn}^*$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \}$ är ett huvudidealområde
- Hensel-lyft
- Möbiusinversion

Algebrarelaterade spörsmål i kursen:

- Gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ är cyclisk då n är primtalspotens
- $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm $\gcd(m, n) = 1$, samma för $\mathbb{Z}_{mn}^*$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \}$ är ett huvudidealområde
- Hensel-lyft
- Möbiusinversion

Algebrarelaterade spörsmål i kursen:

- Gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ är cyclisk då n är primtalspotens
- $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm $\gcd(m, n) = 1$, samma för $\mathbb{Z}_{mn}^*$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \}$ är ett huvudidealområde
- Hensel-lyft
- Möbiusinversion

Algebrarelaterade spörsmål i kursen:

- Gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ är cyclisk då n är primtalspotens
- $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm $\gcd(m, n) = 1$, samma för $\mathbb{Z}_{mn}^*$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \}$ är ett huvudidealområde
- Hensel-lyft
- Möbiusinversion

Algebrarelaterade spörsmål i kursen:

- Gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ är cyclisk då n är primtalspotens
- $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm $\gcd(m, n) = 1$, samma för $\mathbb{Z}_{mn}^*$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \}$ är ett huvudidealområde
- Hensel-lyft
- Möbiusinversion

Algebra-relaterade spörsmål vi hoppar

- Permutationer, cykeltyp, partitioner
- Algebraiska talkroppar, deras heltal, klasstal

Algebra-relaterade spörsmål vi hoppar

- Permutationer, cykeltyp, partitioner
- Algebraiska talkroppar, deras heltal, klasstal

Elementär talteori

- "Elementär" betyder ingen avancerad analys eller algebra, ingen komplicerad kombinatorik
- Inte samma som "lätt"
- Teorin byggs upp från grunden, i princip inga förkunskaper
- Men behöver mängdlära, induktion
- Användbart: linjär algebra

Elementär talteori

- "Elementär" betyder ingen avancerad analys eller algebra, ingen komplicerad kombinatorik
- Inte samma som "lätt"
- Teorin byggs upp från grunden, i princip inga förkunskaper
- Men behöver mängdlära, induktion
- Användbart: linjär algebra

Elementär talteori

- "Elementär" betyder ingen avancerad analys eller algebra, ingen komplicerad kombinatorik
- Inte samma som "lätt"
- Teorin byggs upp från grunden, i princip inga förkunskaper
- Men behöver mängdlära, induktion
- Användbart: linjär algebra

Elementär talteori

- "Elementär" betyder ingen avancerad analys eller algebra, ingen komplicerad kombinatorik
- Inte samma som "lätt"
- Teorin byggs upp från grunden, i princip inga förkunskaper
- Men behöver mängdlära, induktion
- Användbart: linjär algebra

- "Elementär" betyder ingen avancerad analys eller algebra, ingen komplicerad kombinatorik
- Inte samma som "lätt"
- Teorin byggs upp från grunden, i princip inga förkunskaper
- Men behöver mängdlära, induktion
- Användbart: linjär algebra

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Textbok: Rosen

- "Elementary Number Theory" av Rosen
- Chapt 1.5, 2.1, 3, 4.1-4, 5.1, 6, 7.1-4, 9, 11.1-4, 12, 13.1-4, 14.
- Definierar kursen
- Jag kommer inte att ta upp allt på föreläsningarna
- Kommer också att använda "Elementary number Theory" av Stein
- Hackman's manuskript rekommenderas som bredvidläsning
- Gaussiska heltal via Conrads text

Föreläsningar, övningsräkning

- 19 sessioner
- Föreläsningar
- Övningsräkning
- Lista på rekommenderade övningar på kurshemsidan
  `https://jansn19.gitlab-pages.liu.se/tata54-kurshemsida/`

Föreläsningar, övningsräkning

- 19 sessioner
- Föreläsningar
- Övningsräkning
- Lista på rekommenderade övningar på kurshemsidan
  `https://jansn19.gitlab-pages.liu.se/tata54-kurshemsida/`

Föreläsningar, övningsräkning

- 19 sessioner
- Föreläsningar
- Övningsräkning
- Lista på rekommenderade övningar på kurshemsidan
  `https://jansn19.gitlab-pages.liu.se/tata54-kurshemsida/`

Föreläsningar, övningsräkning

- 19 sessioner
- Föreläsningar
- Övningsräkning
- Lista på rekommenderade övningar på kurshemsidan
  `https://jansn19.gitlab-pages.liu.se/tata54-kurshemsida/`

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal

Kursöversikt

1. Heltal, delbarhet
2. Unik faktorisering
3. Sgd, Linjära Diofantiska ekvationer
4. Kongruenser, Kinesiska restsatsen
5. Multiplikativ ordning, Fermat, Euler
6. Aritmetiska funktioner, Möbiusinversion
7. Hensel-lyft
8. Lagrange, Primitiva rrötter, Diskreta logaritmer
9. Kvadratisk Reciprocitet
10. Kedjebråk
11. Pell's ekvation
12. Summor av kvadrater
13. Gaussiska heltal