

# Talteori, Föreläsning 10

## Pells ekvation

Jan Snellman<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Matematiska Institutionen  
Linköpings Universitet

Föreläsningsanteckningar på kurshemsidan <http://courses.mai.liu.se/GU/TATA54/>



Jan Snellman

Pells ekvation

Tillämpningar

## ① Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## ② Tillämpningar

## Pells ekvation

## Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Definition

- Pells ekvation är den Diofantiska ekvationen (i  $x, y$ )

$$x^2 - dy^2 = 1$$

med parametern  $d$  ett heltal

- Negativa Pell är

$$x^2 - dy^2 = -1$$

- Man kan också studera Pell-liknande ekvationer på formen

$$x^2 - dy^2 = n$$

där parametern  $n$  är ett heltal

Obs: om  $(x, y)$  lösning så är  $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$  också lösningar.

## Pells ekvation

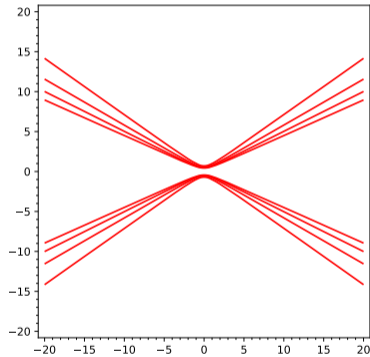
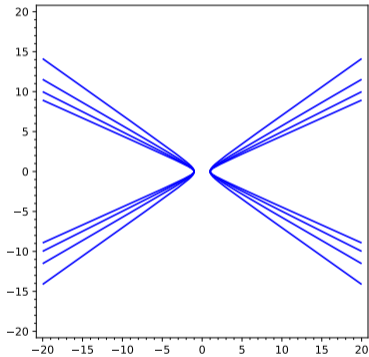
## Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar



Jan Snellman

## Pells ekvation

Varianter

## Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

Vi studerar

$$x^2 - dy^2 = n$$

- Om  $d, n < 0$  så ingen lösning
- Om  $d < 0, n > 0$  så uppfyller lösning  $|x| \leq \sqrt{n}, |y| \leq \sqrt{n/|d|}$ , så ändligt många lösningar
- Om  $d = D^2$  så

$$n = x^2 - dy^2 = x^2 - D^2y^2 = (x + Dy)(x - Dy)$$

så lösning svarar mot lösning till ekv. sys.

$$x + Dy = a$$

$$x - Dy = b$$

$$ab = n$$

Återigen, ändligt många lösningar

Jan Snellman

## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

**Teorem**

Antag  $0 < d$ ,  $|n| < \sqrt{d}$ ,  $d$  ej kvadrat. Om  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  uppfyller  $x^2 - dy^2 = n$ ,  $x, y > 0$ , så är  $x/y$  en konvergent till KB av  $\sqrt{d}$ .

**Bevis.**

Antag  $n > 0$ , då

$$(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = n,$$

så  $x - y\sqrt{d} > 0$ , så  $x > y\sqrt{d}$ , så  $\frac{x}{y} - \sqrt{d} > 0$ . Då

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{x - \sqrt{d}y}{y} = \frac{x^2 - dy^2}{y(x + y\sqrt{d})} < \frac{|n|}{y(2y\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{2y^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2y^2}$$

En så bra approximation måste härröra från en kedjebråkskonvergent!  $\square$

## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Teorem

$d$  positivt heltal, ej kvadrat. Då är KB till  $\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ , och motsvarande konvergenter  $p_k/q_k$ , kan beräknas som följer:

$$\textcircled{1} \quad \alpha_0 = \sqrt{d}, \quad a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor, \quad P_0 = 0, \quad Q_0 = 1, \quad p_0 = a_0, q_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}, \quad a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$$

$$\textcircled{3} \quad P_{k+1} = a_k Q_k - P_k, \quad Q_{k+1} = (d - P_{k+1}^2)/Q_k$$

$$\textcircled{4}$$

$$P_{k+1}p_k - nq_k = -Q_{k+1}p_{k-1}$$

$$p_k - P_{k+1}q_k = Q_{k+1}q_{k-1}$$

För alla  $k$  gäller att

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1} Q_{k+1}$$

## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Teorem

$d$  positivt heltal, ej kvadrat. Låt  $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots]$ , och låt  $n$  vara periodlängden av KB-utvecklingen. Låt  $p_k/q_k$  vara den  $k$ :e konvergenten.

- Om  $n$  jämn, så har negativa Pell inga lösningar, och Pell  $x^2 - dy^2 = 1$  har lösningarna  $x = p_{jn-1}$ ,  $y = q_{jn-1}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$
- Om  $n$  udda, så har negativa Pell lösningarna  $x = p_{(2j-1)n-1}$ ,  $y = q_{(2j-1)n-1}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , och Pell lösningarna  $x = p_{2jn-1}$ ,  $y = q_{2jn-1}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$

## Bevis.

Läs Rosen.





## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

**Samband med KB**

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Exempel

$\sqrt{17} = [4, \bar{8}]$ , så periodlängden är 1. Udda konvergenter är

$$33/8, 2177/528, 143649/34840, 9478657/2298912, \dots$$

och  $33^2 - 17 * 8^2 = 1$ .

Jämna konvergenter är

$$268/65, 17684/4289, 1166876/283009, 76996132/18674305, \dots$$

och  $268^2 - 17 * 65^2 = -1$ .

## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Lemma

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

*så om  $(x_1, x_2), (x_2, y_2)$  är lösningar till (standard) Pell, så är också  $(x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$  en lösning.  
Speciellt så är  $(x_1^2 + dy_1^2, 2x_1y_1)$  en lösning.*

## Bevis.

Uppenbart. □

Märk:

$$(x + \sqrt{d}y)^2 = x^2 + dy^2 + \sqrt{d}2xy.$$

## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Teorem

- ① Om  $(x_1, y_1)$  är en lösning till  $x^2 - dy^2 = 1$ , så gäller att om vi skriver

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^k = x_k + \sqrt{d}y_k,$$

så är  $(x_k, y_k)$  också lösning till (standard) Pell.

- ② Alla lösningar till standard Pell fås på detta sätt från minsta lösning  $(x_1, y_1)$ .

## Bevis.

- ① Lätt.  
② Svårt, läs i Rosen.



## Pells ekvation

Varianter

Triviala fall

Samband med KB

Nya lösningar från gamla

## Tillämpningar

## Exempel

Studera åter

$$x^2 - 17y^2 = 1,$$

med minsta lösning  $(x_1, y_1) = (33, 8)$ .

Vi beräknar:

$$(33 + 8\sqrt{17})^2 = 33^2 + 17 * 8^2 + 16 * 33 * \sqrt{17} = 2177 + 528\sqrt{17},$$

så  $(2177, 528)$  nästa lösning.

**Exempel**

Eliminerar vi  $t$  från systemet

$$x^2 - 21t - 11 = 0$$

$$y^2 - 7t - 9 = 0$$

får vi den Pell-liknande ekv  $x^2 - 3y^2 + 16 = 0$ .

$$x^2 - 21 * t - 7 = 0$$

$$y^2 - 7 * t - 2 = 0$$

ger  $x^2 - 3 * y^2 = 1$ .

**Exempel**

Eftersom  $(x, y) = (2177, 528)$  lösn till  $x^2 - 17y^2 = 1$ , så

$$4.1231 \approx \sqrt{17} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{y} \approx \frac{x}{y} = \frac{2177}{528} \approx 4.1231$$

**Problem**

När är  $\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=n+1}^m k$  ?

$$\begin{aligned}
 0 &= 8RHS - 8LHS = -4n(n+1) + 4(n+1+m)(m-n) \\
 &= -4n^2 - 4n + 4nm - 4n^2 + 4m - 4n + 4m^2 - 4mn \\
 &= 4m^2 + 4m - 8n^2 - 8n \\
 &= (2m+1)^2 - 1 - 2((2n+1)^2 - 1) \\
 &= (2m+1)^2 - 2((2n+1)^2) + 1 \\
 &= s^2 - 2t^2 + 1
 \end{aligned}$$

Negativa Pell!





Konvergenterna är

$$\left[ 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378} \right]$$

Den första udda konvergenten  $7/5$  ger lösningen  $7^2 - 2 * 5^2 = -1$  till negativa Pell. Så  $s = 7 = 2m + 1$ ,  $t = 5 = 2n + 1$  ger  $m = 3$ ,  $n = 2$ , och

$$\sum_{k=1}^2 k = 1 + 2 = 3 = \sum_{k=3}^3 k$$

Den andra udda konvergenten  $41/29$  ger lösningen  $41^2 - 2 * 29^2 = -1$  till negativa Pell. Så  $s = 41 = 2m + 1$ ,  $t = 29 = 2n + 1$  ger  $m = 20$ ,  $n = 14$ , och

$$\sum_{k=1}^{14} k = 1 + 2 + \dots + 14 = 105 = \sum_{k=15}^{20} k = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$$