Talteori, algebraiska begrepp

Multiplikativ ordning, Cykliska Gruper, Fermats och Eulers satser

Jan Snellman[1]

[1]Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Föreläsningsanteckningar på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA54/`

Summary

Summary

Summary

Definition

$(G, *, e)$ är en grupp om för alla $a, b, c \in G$,

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$,
2. $a * e = e * a = a$,
3. finns unik $a^{-1} \in G$ så att $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$.

Om $a * b = b * a$ alltid gäller, så är gruppen Abelsk (kommutativ).

Definition

Den delgrupp till en grupp G är en delmängd $H \subseteq G$ så att

1. $e \in H$,
2. om $h \in H$ så $h^{-1} \in H$,
3. om $h_1, h_2 \in H$ så $h_1 * h_2 \in H$.

Vi skriver $H \leq G$.

Teorem

Om $(G, *, e)$ grupp och H delgrupp, så är $(H, *, e)$ en grupp. En delgrupp till en abelsk grupp är fortsatt abelsk.

Exempel

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$ är en abelsk grupp
- $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ är likaså abelska grupper under addition
- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abelsk grupp under multiplikation
- $\mathcal{T} = \{ z \in \mathbb{C} || z | = 1 \}$ också abelsk grupp
- För varje positivt heltal n, $\left\{ \exp(\frac{2k\pi i}{n}) \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ abelsk grupp under multiplikation
- För varje positivt heltal n, $\mathbb{Z}_n$ abelsk grupp under addition
- Den "typiska" ändliga, icke-abelska gruppen är gruppen S_n av bijektioner $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ under funktionssammansättning

Exempel

Vi studerar additionstabellen för de abelska gruppen $(\mathbb{Z}_4, +, [0]_4)$ och $(\mathbb{Z}_5, +, [0]_5)$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Kom ihåg: i $\mathbb{Z}_n$ så har $g = [a]_n$ en multiplikativ invers omm $\mathrm{sgd}(a,n) = 1$.

Definition

$\mathbb{Z} \ni n > 1$.

- $\mathbb{Z}_n^* = \{\, [a]_n | \mathrm{sgd}(a,n) = 1 \,\}$.
- $\phi(n) = |\{\, 1 \leq a < n | \mathrm{sgd}(a,n) = 1 \,\}| = |\mathbb{Z}_n^*|$.

$\mathbb{Z}_n$ är inte en grupp under multiplikation, eftersom det finns element som inte har någon invers, men:

Teorem

$\mathbb{Z}_n^*$ är en abelsk grupp.

Exempel

$$\mathbb{Z}_2^* = \{[1]_2\}$$
$$\mathbb{Z}_3^* = \{[1]_3, [2]_3\}$$
$$\mathbb{Z}_4^* = \{[1]_4, [3]_4\}$$
$$\mathbb{Z}_5^* = \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$$
$$\mathbb{Z}_6^* = \{[1]_6, [5]_6\}$$
$$\mathbb{Z}_7^* = \{[1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7\}$$
$$\mathbb{Z}_8^* = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$$

Exempel

Multiplikation i $\mathbb{Z}_5^*$ och i $\mathbb{Z}_8^*$

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

*	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Definition

- G ändlig grupp, $g \in G$.
- $g^2 = g * g$, $g^3 = g * g * g$, et cetera.
- $g^{-2} = g^{-1} * g^{-1} = (g * g)^{-1}$.
- $g^i * g^j = g^{i+j}$.
- $g \in G$ har ordning $o(g) = n$ om $g^n = 1$ men $g^m \neq 1$ for $1 \leq m < n$.
- Existerar ty $g^i = g^j$ medför $g^{i-j} = g^0 = 1$.
- $g^s = 1$ omm $n|s$.
- $g^i = g^j$ omm $i \equiv j \mod n$.

Lemma

Om $o(g) = n < \infty$ *och* $a \in \mathbb{Z}_+$ *så*

$$o(g^a) = \frac{n}{\mathrm{sgd}(a,n)}.$$

Lemma

Om $gh = hg$, $o(g) = n < \infty$, $o(h) = m < \infty$ *så* $o(gh) | \mathrm{mgm}(n,m)$.

Definition

Vi säger att $a \in \mathbb{Z}$ har multiplikativ ordning n modulo m om $o([a]_m) = n$, där $[a]_n \in \mathbb{Z}_n^*$. Med andra ord så är $a^n \equiv 1 \mod m$ men ej för mindre potenser.

Exempel

- $3^2 = 9 \equiv 1 \mod 8$, så 3 har multiplikativ ordning 2 modulo 8.
- $3^2 = 9 \equiv 4 \mod 5$, $3^3 = 27 \equiv 2 \mod 5$, $83^4 = 81 \equiv 1 \mod 5$, så 3 har multiplikativ ordning 4 modulo 5.

Definition

- G gruppp, $*$ operation, 1 enhet
- $g \in G$
- $\langle g \rangle = \{ g^n | n \in \mathbb{Z} \}$
- "Delgrupp" till G, minsta som innehåller g
- Cyklisk delgrupp genererad av g
- Om $G = \langle g \rangle$ så G cyklisk grupp, g generator
- Additiv notation: $(G, +, 0)$, $\langle g \rangle = \{ ng | n \in \mathbb{Z} \}$

Lemma

- $o(g) = |\langle g \rangle|$
- $(\mathbb{Z}_n, +, [0]_n) = \langle [1]_n \rangle$
- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$
- $\mathbb{Z}_5^* = \langle [2]_5 \rangle$
- $\mathbb{Z}_8^*$ *ej cyklisk*

Isomorfa grupper

- G, H grupper
- $f : G \to H$ bijektion, $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$
- $G \simeq H$, G och H isomorfa
- Samma struktur, andra namn på elementen
- Alla egenskaper samma

- Speciellt, upp till iso, en enda cyklisk grupp av storlek n, kalla den C_n.
- $(\mathbb{Z}_n, +) \simeq C_n$
- $\left\{ \exp(\frac{2k\pi i}{n}) \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \simeq C_n$
- $(\mathbb{Z}, +) \simeq C_\infty$,
- $(\mathbb{Z}_5^*, *) \simeq C_4$

Definition

- G, H grupper
- $G \times H = \{ (g,h) | g \in G,\ h \in H \}$
- Komponentvis addition och multiplikation

Lemma

1. G, H *grupper*
2. $g \in G,\ h \in H,\ o(g), o(h) < \infty$
3. $(g,h) \in G \times H$
4. *Då* $o((g,h)) = \mathrm{mgm}(o(r), o(s))$

Teorem

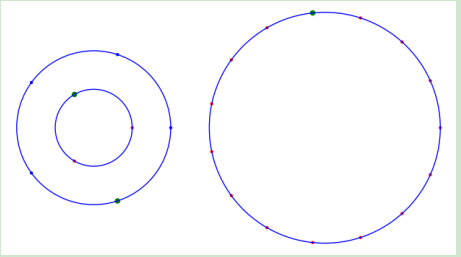
$C_{mn} \simeq C_m \times C_n$ *iff* $\gcd(m,n) = 1$

Bevis.

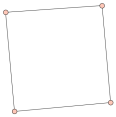
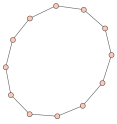
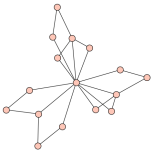
$C_{mn} \simeq (\mathbb{Z}_{mn}, +, [0]_{mn})$. $[a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a_n])$ isomorfi enligt Kinesiska restsatsen. □

Exempel

$C_3 \times C_5 \simeq C_{15}$, iso $([4]_3, [4]_5) \longleftrightarrow [4]_{15}$.

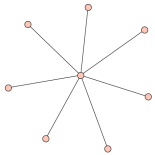


Cykelgrafer I

- Shanks, "Solved and Unsolved Problems in Number Theory"
- Rita varje cykel $1 \rightarrow g \rightarrow g^2 \rightarrow \cdots \rightarrow g^n = 1$
- Ta bort delcykler
- C_4  $C_4 \times C_3$ 
- $C_4 \times C_4$ 

Cykelgrafer II

- $C_2 \times C_2 \times C_2$



Lagranges sats

Teorem (Lagrange)

Om

- G *grupp*
- $|G| = n < \infty$
- $H \leq G$ *delgrupp,* $|H| = m$

så $m|n$. *Speciellt, om* $g \in G$, *så* $o(g)|n$.

Bevis.

Inte svårt, men behöver begreppet "sidoklasser" □

Vi kommer visa detta för $G = \mathbb{Z}_n^*$ med elementära metoder.

Teorem (Euler)

Om $\text{sgd}(a,n)=1$ *så*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n \qquad (*)$$

Ekvivalent, $[a]_n^{\phi(n)} = [1]_n \in \mathbb{Z}_n^*$.

Bevis.

Sätt $s=\phi(n)$. Låt $T=\{t_1,\ldots,t_s\}$ vara ett val av precis ett element från varje klass i $\mathbb{Z}_n^*$.

Hävdar: aT innehåller också precis ett element från varje klass. Alla at_i icke-kongruenta modulo n, visat tidigare. Eftersom $\text{sgd}(t_i,n)=1$ och $\text{sgd}(a,n)=1$ så $\text{sgd}(at_i,n)=1$.

Nu har vi att

$$1*(t_1t_2\cdots t_s) \equiv (at_1)(at_2)\cdots(at_s) \equiv a^s(t_1t_2\cdots t_s) \mod n$$

Stryk $t_1t_2\cdots t_s$, det får du! □

Exempel

- $n = 8,\ T = \{1, 3, 5, 7\},$
- $a = 5,\ aT = \{5, 15, 25, 35\} \equiv \{5, 7, 1, 3\} \mod 8,$
- $5t_1 * 5t_2 * 5t_3 * 5t_4 \equiv 5 * 7 * 1 * 3 \equiv 1 * 3 * 7 * 5 \equiv 1 \mod 8$
- $5t_1 * 5t_2 * 5t_3 * 5t_4 \equiv 5^4 * t_1t_2t_3t_4 \equiv 5^4 * 1 * 3 * 5 * 7 \equiv 1 * 1 \mod 8$
- $n = 3,\ T = \{1, 2\},$
- $a = 2,\ aT = \{2, 4\} \equiv \{2, 1\} \mod 3,$
- $2t_1 * 2t_2 \equiv 2 * 1 \equiv 1 * 2 \equiv 2 \mod 3$
- $2t_1 * 2t_2 \equiv 2^2 * t_1 * t_2 \equiv 2^2 * 1 * 2 \equiv 2^2 * 2 \mod 3$

Teorem (Fermat)

Låt p vara ett primtal och a ett heltal så att $p \not| a$. Då gäller att

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p \qquad (**)$$

Med andra ord: $[a]_p^{p-1} = [1]_p \in \mathbb{Z}_p^*$.

Bevis.

$\phi(p) = p - 1$. □

Exempel

Vad blir resten då 1247^{1231} delas med 7?

$$\begin{aligned} 1248^{1231} &\equiv (178*7+2)^{205*6+1} \mod 7 \\ &\equiv 2^{205*6+1} \mod 7 \\ &\equiv 2^{205*6} * 2^1 \mod 7 \\ &\equiv (2^6)^{205} * 2^1 \mod 7 \\ &\equiv 1^{205} * 2^1 \mod 7 \\ &\equiv 2 \mod 7 \end{aligned}$$

Exempel (Upprepad kvadrering)

Vad blir 3^{19} modulo 23?

$$
\begin{aligned}
3^0 &\equiv 1 \mod 23 \\
3^1 &\equiv 3 \mod 23 \\
3^2 &\equiv 3^2 \equiv 9 \mod 23 \\
3^4 &\equiv (3^2)^2 \equiv 81 \equiv 12 \mod 23 \\
3^8 &\equiv (3^4)^2 \equiv 12^2 \equiv 6 \mod 23 \\
3^{16} &\equiv (3^8)^2 \equiv 6^2 \equiv 13 \mod 23
\end{aligned}
$$

så

$$3^{19} = 3^{16+2+1} = 3^{16} * 3^2 * 3^1 \equiv 13 * 9 * 3 \equiv 6 \mod 23$$

Exempel (Fermat)

Beräkna 3^{19} modulo 17

$$3^{19} = 3^{16+3} = 3^{16} * 3^3 \equiv 3^3 \equiv 10 \mod 17$$

Exempel (Kinesiska restsatsen)

Vad blir $x = 3^{19}$ modulo $17 * 23 = 391$?

$$x \equiv 10 \mod 17$$

$$x \equiv 6 \mod 23$$

så

$$x \equiv 230 \mod 391$$

Definition

En kommutativ, unitär ring $(R, +, 0, *, 1)$ är en abelsk grupp $(R, +, 0)$ med en extra associativ och kommutativ operation $*$, för vilken elementet 1 är en enhet. Vi kräver också att följande distributiva lag gäller:

$$x * (y + z) = x * y + x * z \qquad \text{för alla } x, y, z \in R.$$

Definition

En kommutativ, unitär ring R är ett integritetsområde om $a, b \neq 0$ medför att $a * b \neq 0$.
R är en kropp om varje $a \neq 0$ har en multiplikativ invers a^{-1} så att $aa^{-1} = 1$.

Varje kropp är ett integritetsområde.

Exempel

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kommutativa, unitära ringar. $\mathbb{Z}$ område, ej kropp. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kroppar.
- $\mathbb{Z}_n$ kommutativ, unitär kropp.
- Om R ring så $R[x]$ ring.

Teorem

$\mathbb{Z}_n$ kropp omm n primtal, integritetsområde omm kropp.

Definition

Om R kommutativ, unitär ring så är enhetsgruppen

$$R^* = \{ a \in R | a \text{ har multiplikativ invers} \}$$

Teorem

Enhetsgruppen är en grupp.

Vi har sett $\mathbb{Z}_n^*$ tidigare. Vad är $\mathbb{Z}^*$?

Definition

- R, S kommutativa, unitära ringar
- $T = R \times S = \{ (r,s) | r \in R, s \in S \}$
- Komponentvis addition and multiplikation
- $R \simeq S$ omm existerar bijektion $F : R \to S$ som bevarar multiplikation och addition:
  1. $F(a+b) = F(a) + F(b)$
  2. $F(ab) = F(a)F(b)$

Vi behöver maskineriet för följande:

Teorem

Om R, S kommutativa, unitära ringar, så

$$(R \times S)^* \simeq R^* \times S^*.$$

Det ger:

Teorem

- $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ *omm* $\text{sgd}(m,n) = 1$
- *Om* $\text{sgd}(m,n) = 1$ *så* $\mathbb{Z}_{mn}^* \simeq \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$

Exempel

- $m = 3,\ n = 4$
- $\mathrm{sgd}(m, n) = 1$
- $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_{12}$ as rings
- $\mathbb{Z}_3^* \simeq C_2,\ \mathbb{Z}_4^* \simeq C_2$
- $\mathbb{Z}_{12}^* \simeq C_2 \times C_2 \not\simeq C_4$
- Multiplikationstabeller:

$\mathbb{Z}_3^*$

$*$	1	2
1	1	2
2	2	1

$\mathbb{Z}_4^*$

$*$	1	3
1	1	3
3	3	1

$\mathbb{Z}_{12}^*$

$*$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1